Riemannsche Geometrie
als bestmögliche Abbildung der materiellen Welt

von *Ulrich Bruchholz*

Seit es Menschen gibt, haben diese das Bestreben die Welt vereinfacht darzustellen und sich in einfachen Bildern vorzustellen. Dabei mussten sie bald einsehen, dass dies mit der *ideellen* Welt *grundsätzlich* nicht möglich ist. Das bedeutet, die Frage nach dem „Warum“ ist müßig und sogar schädlich. Die Ursache unserer Existenz ist nicht unser Verdienst und kann niemals geklärt werden. Wer das für sich in Anspruch nimmt, maßt sich an mehr zu wissen als Gott. - Wissenschaftler werden jedoch dafür bezahlt zu ergründen wie die Welt *ist*, und dafür gut funktionierende Modelle zu finden.

Die gängige Vorstellung besteht darin dass irgendwelche „Materie“ im Raum schwebe und in der Zeit Änderungen unterworfen sei. Dieses Bild wird sehr gestört durch die Entdeckung der Felder. Ein Feld bezeichnet eine bestimmte Eigenschaft von Raum und Zeit abhängig vom Raum- und Zeitpunkt. Es gibt nun Felder, die sich im Vakuum ausbreiten ! Das sind Gravitation und Elektromagnetismus. Diese Felder lassen sich nur als *geometrische* Eigenschaften von Raum *und* Zeit verstehen.

Da wir in Raum und Zeit leben, können wir nicht *unmittelbar* die geometrischen Eigenschaften von Raum und Zeit sehen. Da der Raum drei Dimensionen hat, können wir sehr gut die Eigenschaften zweidimensionaler Räume - das sind Flächen - untersuchen. Das hat bereits GAUSS für uns getan. Danach wird eine solche Fläche in jedem Punkt der Fläche durch eine einzige Größe - die GAUSSsche Krümmung - beschrieben. Die GAUSSsche Krümmumg ist unabhängig von den gewählten Koordinaten und damit auch von der Lage der Fläche im Raum.

Bernhard RIEMANN definierte nun eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit aus n(n-1)/2 gegenseitig orthogonalen Flächen. Die Eigenschaften dieser Flächen sind ja mit ihren GAUSSschen Krümmungen bekannt. (Diese heißen jetzt RIEMANNsche Krümmungen.) Beispiel: Im Raum lassen sich in jedem Punkt drei glatte Flächen gegenseitig senkrecht stellen. So wie wir das von EUKLID kennen, sind diese eben. Was aber, wenn sich die Flächen bei dieser Aktion krümmen ? Dann ist der Raum selbst gekrümmt (und umgekehrt).

Wie ist das nun mit der Zeit ? Albert EINSTEIN erkannte, dass es keine absolute Zeit gibt, sondern jeder seine eigene Zeit hat. Somit wird die Zeit zu einer *Koordinate* und damit eine geometrische Kategorie. Hermann MINKOWSKI fand, dass die LORENTZ-Transformationen (welche die Relationen von Länge und Zeit bei Relativ-Bewegung betreffen) eine simple Koordinatentransformation darstellen, wenn man die Zeit als vierte Koordinate einführt. Die Zeit ist dabei eine imaginäre Länge und umgekehrt. Relation: 1s = j 300000 km (mit $j^2 = -1$). Das bedeutet, unser Dasein ist zeitartig. EINSTEIN sprach von „vierdimensionalen Fäden“. - Das Licht ist hierin ein Grenzfall, denn das Licht wird bei seiner Ausbreitung nicht älter.

Nachdem Raum und Zeit zu einer vierdimensionalen Raumzeit als geometrisches Gebilde vereinigt sind, stellt sich die Frage, wie die geometrischen Eigenschaften der Raumzeit der Physik zuzuordnen seien. Auch hier hat EINSTEIN den Schlüssel gefunden. - Jeder Punkt im Raum bildet eine Kurve in der vierdimensionalen Raumzeit. Diese Kurve wird geometrisch wesentlich durch ihren *Krümmungsvektor* bestimmt. Wenn wir nun NEWTONs Kraftgleichung mit der Formel für den Krümmungsvektor vergleichen, ergibt sich *Kraft = Masse mal Krümmungsvektor* . Das heißt, *beide*, beschleunigte Bewegung *und* Gravitation, sind Bestandteile des Krümmungsvektors.

Wenn die Eigenschaften der Kurven in der Raumzeit bekannt sind, lässt sich auch auf die Geometrie der

Raumzeit selbst schließen. EINSTEIN fand eine Beziehung zwischen dem RICCI-Tensor und einem Energie-Impuls-Tensor. Das ist ein Mischmasch zwischen geometrischen und physikalischen Größen. Daraus lässt sich jedoch die Gravitation aus der verteilten Masse bestimmen. *Und als geometrische Eigenschaft der Raumzeit verstehen.* - Was ist nun die Masse ? Um dies zu ergründen, sollte man sich dem anderen Feld im Vakuum, dem Elektromagnetismus, zuwenden.

Das elektromagnetische Feld wird durch die MAXWELL-Gleichungen beschrieben. LORENTZ fand dazu die Energie- und Impulskomponenten des elektromagnetischen Feldes, die sich in einem Energie-Tensor zusammenfassen lassen. Wird nun dieser Energie-Tensor in EINSTEINs Gravitationsgleichung eingesetzt, ergibt sich ein *rein geometrisches* Gleichungssystem ! Unter einer schwerwiegenden Bedingung: *Massen und Impulse in den Einstein-Gleichungen sowie Ladungen und Ströme in den Maxwell-Gleichungen* ***müssen*** *verschwinden !* - Wo bleiben diese dann ? Die Antwort auf diese Frage ist so einfach, dass sie bisher übersehen wurde. Diese „materiellen" Größen treten als Integrationskonstanten der quellenfreien EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen auf. Masse, Spin, elektrische Ladung und magnetisches Moment sind die ersten Integrationskonstanten. (Es gibt keine Antwort auf die Frage, warum das so ist. Die Umrechnung ergibt sich mit Vergleich der Feldverläufe aus den phänomenologischen und aus den geometrischen Gleichungen.) - Bei Vorliegen gewisser Randbedingungen nehmen die Integrationskonstanten diskrete Werte an. Mit diesen gibt es dann diskrete Lösungen.

Obwohl die quellenfreien EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen diskrete Lösungen involvieren können, haben diese in *scheinbarem* Widerspruch dazu viele Freiheitsgrade, denn es gibt für 14 Variable nur 10 unabhängige Gleichungen. Das bedeutet, die Welt ist im Grunde *nicht* kausal. Um dies geometrisch zu verstehen, sollten wir auf RIEMANNs Flächen zurückkommen:

Im allgemeinen Fall sollte die Raumzeit durch $4 \cdot 3/2 = 6$ gegenseitig orthogonale Flächen beschrieben werden. Eine Ableitung aus den quellenfreien EINSTEIN-MAXWELL-Gleichungen ergibt jedoch, dass nur zwei duale (diese schneiden sich im betrachteten *Punkt*) Flächen mit besonderen Krümmungsverhältnissen eine Rolle spielen, und die anderen nicht eingehen. Das bedingt wieder die erwähnten Freiheitsgrade. Der elektromagnetische Feldtensor wird aus genau diesen zwei Flächen ausgedrückt, ist also eine geometrische Größe ! - Neuere mathematische Arbeiten (u.a. von DONALDSON *) belegen, dass eben die vierdimensionale Mannigfaltigkeit genau diese Sonderrolle spielt. Die Raumzeit ist also geometrisch einzigartig, und keine andere Mannigfaltigkeit könnte die besonderen geometrischen Eigenschaften annehmen, welche die physikalische Wirklichkeit genau wiederspiegeln.

Was die Quantisierung betrifft, sei auf numerische Simulationen verwiesen, in denen sich Korrelationen ergeben, die auf signifikante Uebereinstimmung der Integrationskonstanten für meist stabile Lösungen mit bekannten Teilchenwerten hinweisen. Zusammenhänge mit dem Chaos bedürfen der Untersuchung.

*) nach einer Information von Herrn Werner Mikus, Köln.

Referenzen zu diesem Artikel sind in http://bruchholz.psf.net/article2.txt zu finden.

Der Autor ist den Herren *Werner Mikus*, Prof. *Manfred Geilhaupt* und Dr. *Gerhard Herres* für Förderung und anregende Diskussionen zu besonderem Dank verpflichtet.

Dipl.-Ing. Ulrich Bruchholz, http://www.bruchholz-acoustics.de/